

# Unntak fra Arkimedes' lov: Oppdrift eller neddrift?

Arkimedes' lov om oppdrift blir introdusert og deretter drøftet med utgangspunkt i resultater som er observert i eksperimenter. Resultatene av eksperimentene danner grunnlag for å formulere et unntak fra Arkimedes' lov.

Gagi Peskovic Worldpower AS

Foto: Unsplash

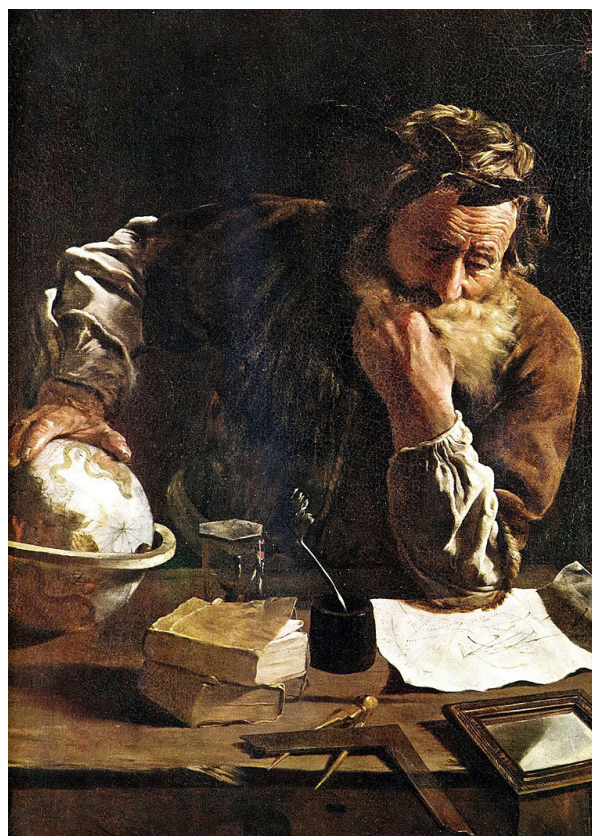
## Introduksjon

For nesten 2300 år siden formulerte Arkimedes en lov om kraften som oppstår som et resultat av trykk-kreftene fra en væske som virker på nedsunkede gjenstander. Dette ble tidligere referert til som Arkimedes' lov og postulerer [1, 2], og blir i dag omtalt som Arkimedes' lov i lærebøker i fysikk.

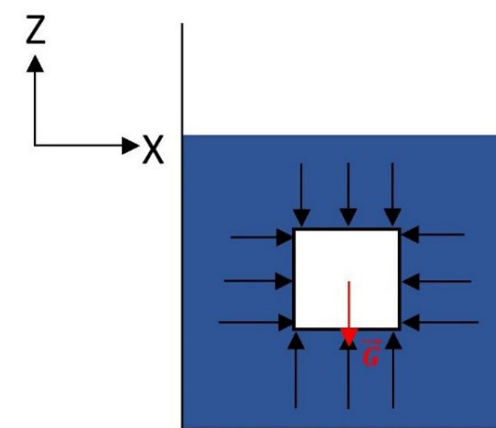
Arkimedes' lov kan uttrykkes som en ligning som relaterer oppdriftskraften til produktet av væsketetthet, tyngdekraften og volumet til den nedsunkede gjenstanden, og er formulert som:

«Når en gjenstand er helt eller delvis nedsunket i en væske, vil en kraft fra væsken virke på gjenstanden. Kraften er rettet oppover mot gravitasjonen, og har en konstant størrelse som tilsvarer tyngden av væsken som har blitt fortrent av gjenstanden.» [3]

Formuleringen av Arkimedes' lov blir illustrert i Figur 2. Betrakt en gjenstand (V) som er nedsunket i en beholder. Beholderen er fylt med en væske som har en tetthet ( $\rho_f$ ). Trykket fra væsken i beholderen vil virke på alle flatene av den nedsunkede gjenstanden. De horisontale trykk-komponentene er like store og virker i motsatte retninger, og dermed nuller de hverandre ut. Den resulterende trykkfordelingen på gjenstanden er illustrert i Figur 3.



**Figur 1.** Maleri av Arkimedes.  
(Maler: Domenico Fetti, ca. 1620)



**Figur 2.** Trykk-komponenter som virker på en helt nedsunket gjenstand fra en væske med tetthet  $\rho_f$ . Trykk-komponentene er illustrert med svarte piler, og tyngdekraften er illustrert med en rød pil.

Ergo, for ikke-komprimerbare og homogene væsker, er oppdriftskraften matematisk formulert som:

$$\begin{aligned}\vec{F}_b &= \rho_f \vec{g}(h + h_0)A - \rho_f \vec{g}h_0A \\ &= \rho_f \vec{g}hA = \rho_f V \vec{g} = G_f \vec{k},\end{aligned}\quad (1)$$

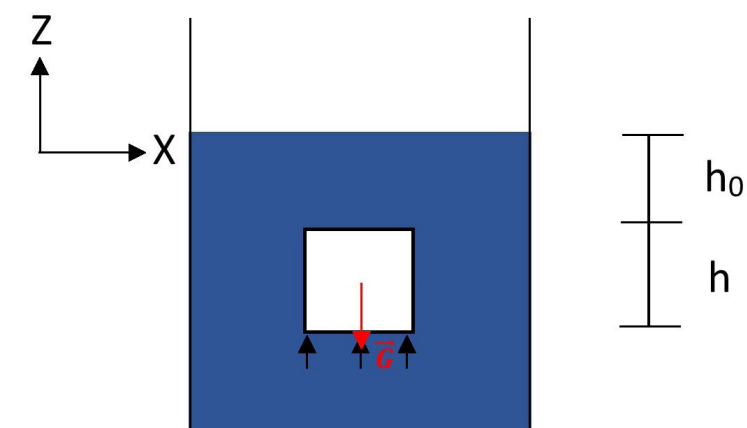
der  $\rho_f$  er tettheten til væsken gjenstanden er nedsunket i,  $V$  er volumet til den nedsunkede gjenstanden (som tilsvarer det fortrente volumet av væsken),  $\vec{g}$  er tyngdeakselerasjonen, og  $G_f$  er tyngden av den fortrente væsken.

I praksis vil oppdriften lettest kunne observeres på en gjenstand som har lavere tetthet enn væsken som gjenstanden er nedsunket i, siden et slikt legeme kan flyte i væsken.

Menneskets tillit til Arkimedes' lov er utvilsomt stor, og blir presentert som en universell lov som er helt fri for unntak. Dette gjelder i lærebøker i både grunnleggende fysikk [4], og i mer avansert fluidmekanikk for ingeniører [5]. Er det slik at Arkimedes' lov gjelder uten unntak, eller er det noe vi har oversett når vi oppfatter Arkimedes' lov som universelt gyldig?

## Fra konstant oppdrift til variabel neddrift

Betrakt en rektangulær gjenstand (V) som er helt nedsunket i en homogen væske med en tetthet ( $\rho_f$ ), slik som illustrert i Figur 4. Anta at det kan konstrueres en ideell situasjon hvor forbindelsen mellom bunnflaten av gjenstanden og bunnflaten av tanken er slik at det ikke er noe væske (eller luft) som siver inn mellom de to flatene. Med andre ord har overflatene full kontakt med hverandre, slik som illustrert i Figur 4.



**Figur 3.** De resulterende trykk-komponentene som virker på en helt nedsunket gjenstand er illustrert med svarte piler, og tyngdekraften er illustrert med en rød pil.

Trykkfordelingen fra væsken på den nedsunkede gjenstanden er illustrert i xz-planet i Figur 4. De horisontale trykk-komponentene er like store og virker i motsatte retninger, og nuller dermed hverandre ut. Den resulterende trykkfordelingen fra væsken får derfor en nedover vertikal retning (med gravitasjonen). Videre kan oppdriftskraften uttrykkes som produktet av den resulterende trykkfordelingen, som virker på den tilhørende øvre flaten av den nedsunkende gjenstanden. Matematisk kan oppdriftskraften dermed uttrykkes som:

$$\vec{F}_b = -\hat{k}[P_{atm} + \rho_f g |h_{top}|]A, \quad (2)$$

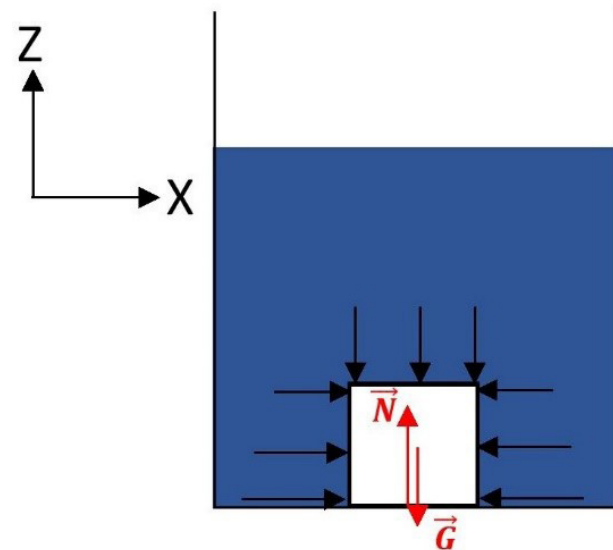
der  $\hat{k}$  er en enhetsnormalvektor som peker normalt og ut fra alle flatene på den nedsunkede gjenstanden,  $P_{atm}$  er det atmosfæriske lufttrykket over væsken,  $\rho_f$  er tettheten til væsken som gjenstanden er nedsunket i,  $g$  er tyngdeakselerasjonen,  $|h_{top}|$  er dybden fra overflaten til væsken og helt ned til den øvre overflaten til gjenstanden, og  $A$  er overflatearealet av den øvre overflaten til gjenstanden.

Tolkning av ligning (2):

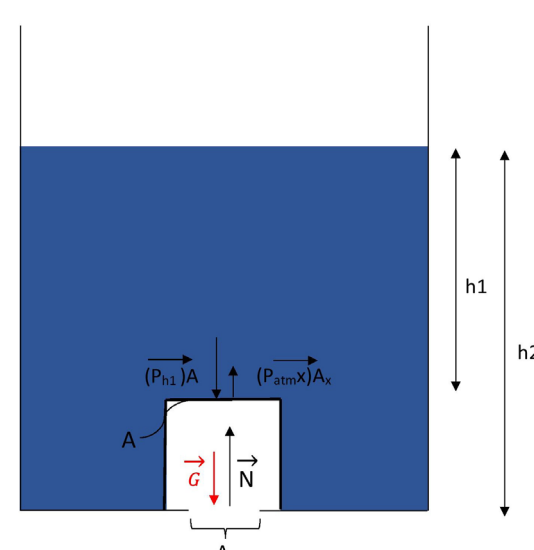
- $(-\hat{k})$  indikerer at oppdriftskraften peker nedover langs z-aksen (negativ langs z-aksen i Figur 4).
- Uttrykket  $[P_{atm} + \rho_f g |h_{top}|]$  er det resulterende (netto) trykket som virker på gjenstanden. Merk at det resulterende trykket virker kun på den øvre overflaten av den nedsunkede gjenstanden. Videre sier leddet  $(\rho_f g |h_{top}|)$  at oppdriftskraften øker lineært med dybden av væsken [6, 7]. Med andre ord endres  $\vec{F}_b$  lineært med  $|h_{top}|$ .



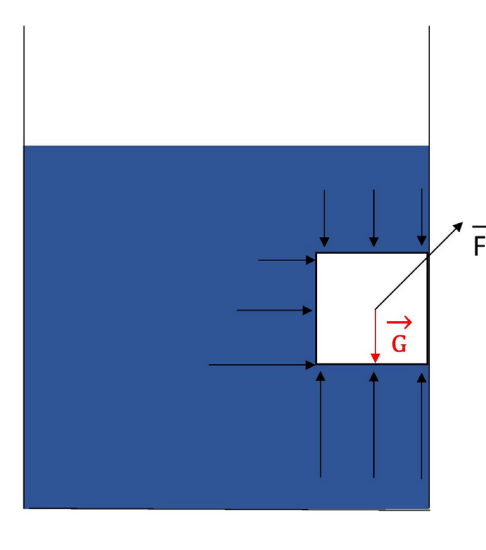
## ► Unntak fra Arkimedes' lov: Oppdrift eller neddrift?



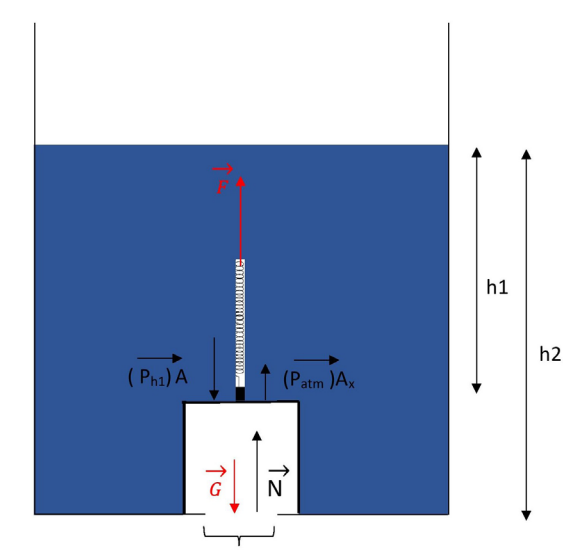
**Figur 4.** En helt nedsunken rektangulær gjenstand, hvor bunnflaten av gjenstanden og bunnflaten av tanken har full kontakt med hverandre: Ingen mengde væske (eller luft) siver inn mellom de to flatene.



**Figur 5.** Praktisk eksperiment: merk at bunnen av tanken har et hull med et areal  $A_x (> 0)$ , slik at det atmosfæriske trykket virker i deler av bunnflaten til den nedsunkede gjenstanden.



**Figur 6.** Praktisk eksperiment: oppdriftskraften skifter retning fra oppover mot tyngdekraften, og er ikke lenger entydig bestemt av produktet  $(\rho \cdot g V \hat{k})$ .



**Figur 7.** Praktisk eksperiment: En endring i størrelsen av oppdriftskraften ved endring av væskeni vået kan observeres og måles med en fjærvekt som er koblet til den øvre overflaten av den nedsunkede gjenstanden.

Resultatet som har blitt oppnådd i ligning (2) ovenfor er i kontrast til den nåværende formuleringen av Arkimedes' lov, uttrykt ved ligning (1). Ligning (1) indikerer at oppdriftskraften til enhver tid er rettet oppover mot gravitasjonen med en konstant størrelse, som tilsvarer tyngden av væsken som har blitt fortrent av gjenstanden. Derfor kan den vanlige formuleringen av Arkimedes lov for oppdrift skape tvetydigheter i lærebøker i fysikk. Det er viktig å understreke at det må fremheves i definisjonen av oppdriftskraften, at ligning (1) er korrekt dersom nedsunkede gjenstander er i helhet omgitt av væsken de er nedsunken i (omgitt på alle sine flater).

### Adhesjon?

I et eksperiment som ble utført av Ray og Johnson [8], avklares det tydelig at kreftene som holder sammen overflatene av den nedsunkede gjenstanden og bunnen av tanken, *ikke* er klebende krefter (adhesjonskrefter). Adhesjonskrefter oppstår når det dannes intermolekylære tiltrekninger mellom overflater (for eksempel ved bruk av lim). Derfor kan adhesjon utelukkes som en forklaring på at oppdriftskraften i ligning (2) ikke passer med den nåværende formuleringen av Arkimedes' lov, gitt ved ligning (1).

### Forslag til eksperiment

Jeg vil her beskrive et eksperiment for å teste gyldigheten av ligning (2), det vil si av unntaket fra Arkimedes' lov for et legeme som har kontakt

med underlaget som beskrevet i forrige avsnitt. I praksis kan det være problematisk å hindre innsiv av væske mellom to flater. Eksperimentet bør derfor utføres ved å lage et hull i bunn av tanken, slik at det virker et atmosfærisk trykk på bunnflaten av gjenstanden (via hullet i bunnen av tanken). Videre kan gjenstanden holdes på plass ved å legge press på gjenstanden, samtidig som det helles væske i tanken. Pass på å sørge for at væskeni vået er større enn høyden til gjenstanden før gjenstanden slippes fri. Ergo bør væskeni vå  $> (h_2 - h_1)$  være tilfredsstillt før gjenstanden slippes fri (se Figur 5). Når det minste kravet til væskeni vået er tilfredsstillt, kan gjenstanden slippes fri, og den resulterende oppdriftskraften kan dermed uttrykkes ved:

$$\vec{F}_b = -(P_{h1}A - P_{atm}A_x)\hat{k}, \quad (3)$$

der  $P_{h1} = P_{atm} + \rho_f g |h_1|$  er trykket som virker i dybden  $h_1$  under overflaten av vannet,  $P_{atm}$  er det atmosfæriske lufttrykket,  $A$  er den øvre overflaten til den nedsunkede gjenstanden, og  $A_x$  er den delen av den nedre overflaten til den nedsunkede gjenstanden som er utsatt for atmosfærisk trykk (kan måles på forhånd).

Det samme eksperimentet kan utføres på sideflaten på en nedsunken gjenstand, slik som illustrert i Figur 6. Trykk-komponentene kan summeres opp, og den resulterende oppdriftskraften vil skifte retning til skrått oppover mot høyre. I tillegg vil størrelsen til oppdriftskraften også endres avhengig av dybden gjenstanden befinner seg i.

Den nødvendige kraften for å løfte opp gjenstanden kan måles ved å variere dybden på væskeni vået over gjenstanden. Dette kan utføres ved å koble opp en kraft-måler (for eksempel en fjærvekt) på toppen gjenstanden, og dra gjenstanden oppover så rett som mulig (se Figur 7). Videre vil man kunne lese av fjærvekten at oppdriftskraften øker ved økt væskeni vå.

Husk at fjærvekten vil inkludere tyngden av gjenstanden i måleresultatene, slik at tyngden til gjenstanden må trekkes fra måleresultatene manuelt. Ergo, vil den målte kraften ( $\vec{F}$ ) kunne uttrykkes som:

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{G}. \quad (4)$$

Da vil måleresultatene samsvare med oppdriftskraften uttrykt ved ligning (3). Umiddelbart etter at gjenstanden dras løs fra underlaget, vil vannet sive inn på den nedre overflaten av gjenstanden. Da vil oppdriftskraften virke som *vanlig* oppdrift, og kunne uttrykkes ved ligning (1).

### Konklusjon

Ut fra en betraktning av et legeme på bunnen av et kar som ledet til ligning (2), kan det konkluderes med at det eksisterer en tvetydighet rundt den vanlige formuleringen av Arkimedes' lov for oppdrift. Den vanlige formuleringen tar ikke høyde for at det eksisterer unntak for et legeme under vann på bunnen av et kar med så tett kontaktflate at det ikke er vann i kontaktflaten. For et slikt legeme gir ikke trykk-kreftene fra væsken på legemet en opp-

drift, men en «neddrift». Man bør derfor i lærebøker i fysikk være nøye med å presisere at den vanlige formuleringen av Arkimedes' lov for oppdrift forutsetter at legemet er omgitt av vann på undersiden. ■

### Referanser

- [1] T.L. Heath. *The Works of Archimedes – Edited in modern notation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2010, s. 253–262 (sit. på s. 9).
- [2] R. Netz. «Proof, amazement, and the unexpected». *Science* 298.5595 (2002), s. 967–968 (sitat på s. 9).
- [3] D. Halliday, R. Resnick og J. Walker. *Fundamentals of Physics*. 9th ed. Wiley, New York, 2011, s. 367–370 (sitat på s. 9).
- [4] R.A. Serway og R.J. Beichner. *Physics for Scientists and Engineers*. 8th ed. Brooks/Cole, Belmont, CA, 2010, s. 408–412 (sitat på s. 9).
- [5] R.W. Fox, A.T. McDonald og P.J. Pritchard. *Introduction to Fluid Mechanics*. 6th ed. Wiley, New York, 2004, s. 52–82 (sitat på sider 7, 8, 11).
- [6] E.H. Graf. «Just What Did Archimedes Say About Buoyancy?» *The Physics Teacher* 42 (2004), s. 296–299 (sitat på sider 9, 27, 30, 37, 38, 57, 65).
- [7] J. Bierman og E. Kincanon. «Reconsidering Archimedes' Principle». *The Physics Teacher* 41 (2003), s. 340–344 (sitat på sider 27, 30, 37, 38, 57, 65).
- [8] G.E. Jones, W.P. Gordon; J. R. Ray, og E. Johnson. «Removing the buoyant force; Removing the buoyant force, a follow-up». *The Physics Teacher* 17 (1979a; 1979b), s. 59–60, 392–393 (sitat på s. 27).